TD algèbre II - Semestre 4

Série : 01 (Opérations sur les matrices)

30/04/2014

Faculté d'économie de Meknès
Mme. Ben cheikh

Université Moulay Ismaïl
Faculté des Sciences Juridiques
Economiques et Sociales – Meknès



Filière Sciences Economiques et Gestion
- Quatrième Semestre –
Année Universitaire 2013 / 2014

TD de Mathématiques
Série N°1 (Opérations sur les Matrices)

Exercice 1 *(Produit de deux matrices)*

Effectuer les produits suivants lorsque c'est possible.

$a)\ (2 \quad 2) \times \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$; $b)\ \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$; $c)\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -2 \\ -3 & 0 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

Exercice 2 : *Calculer l'inverse des matrices suivantes :*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Exercice 3: *Soit* $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

On note $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ *la base canonique de* $\mathbb{R}^3$, *Soit* f *l'endomorphisme de* $\mathbb{R}^3$ *dont la matrice dans* $\mathcal{B}$ *est* A.

On pose $\varepsilon_1 = (1,1,1), \varepsilon_2 = (1,-1,0), \varepsilon_3 = (1,0,1)$ *et* $\mathcal{B}' = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ *une base de* $\mathbb{R}^3$.

1) Ecrire la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ *à la base* $\mathcal{B}'$.

2) En déduire la matrice de f *dans la base* $\mathcal{B}'$.

Exercice 4 : *Calculer les déterminants suivants :*

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} \ ; B = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 6 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} \ ; C = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 9 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} \ ; D = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 13 \\ 2 & -6 & -10 \\ 1 & 9 & 19 \end{vmatrix} ; E = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

Exercice 5 : *Calculer l'inverse des matrices de l'exercice 2 en utilisant leurs déterminants.*

Exercice 6 : *Soient* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1- *Calculer det A, det B et det (AB). Que remarquez-vous ? Cette formule est-elle générale ?*

2- *Comparer det (A+B) et det A + det B. Que peut-on dire de la linéarité du déterminant ?*

Exercice 7 : *Déterminer x dans les cas suivants :*

$$a) \begin{vmatrix} x & -3 & 5 \\ 1 & -1 & 3 \\ 9 & -7 & 8x \end{vmatrix} = 0 \quad ; \ b) \begin{vmatrix} -12 & 3 & 0 \\ -11 & x & -3 \\ -x & -5 & 2 \end{vmatrix} = 141$$

Exercice 8 : *Calculer les déterminants suivants :*

$$a) \begin{vmatrix} x & a & b & c \\ a & x & b & c \\ a & b & x & c \\ a & b & c & x \end{vmatrix} \quad ; \ b) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+c & a+c & a+b \\ bc & ac & ab \end{vmatrix}$$

série N°1 (opération sur les Matrices)

Exercice 1 :

a) $(2,2)\begin{vmatrix}1 & 4\\ 2 & 5\\ 3 & 6\end{vmatrix}$ le nbr de colonne de lignes 1ère est ≠ du nbr des lignes de la 2ème donc on peut pas effectuer le pdt de ces 2 Matrices.

b) $\begin{vmatrix}1 & 3\\ 1 & 4\\ 5 & 7\end{vmatrix} \times \begin{pmatrix}2 & 5\\ 4 & 6\end{pmatrix} \Rightarrow M_{3,2} \times M_{2,2}$ donc $M_{3,2}$

$$= \begin{pmatrix}2+12 & 5+18\\ 2+16 & 5+24\\ 10+8 & 25+18\end{pmatrix} = \begin{vmatrix}14 & 23\\ 18 & 29\\ 18 & 27\end{vmatrix}$$

c) $\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & 3 & -2\\ -3 & 0 & 5\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0 & 2 & 3\\ 1 & -2 & 1\\ -1 & 0 & 4\end{pmatrix}$

$\Rightarrow M_{3,3} \times M_{3,3} = M_{3,3}$

$$\begin{pmatrix}-1-2 & 2+2 & 3-1+8\\ 3+2 & -6 & 3-8\\ -5 & -6 & -5+20\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}3 & 4 & 10\\ 5 & -6 & -5\\ -5 & -6 & 11\end{pmatrix}$$

Exercice 2 :

1ère Méthode

on pose $A^{-1} = \begin{pmatrix}a & c\\ b & d\end{pmatrix}$ la matrice inverse de la Mat A

$$A \times A^{-1} = A^{-1} \times A = I_2$$

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & c\\ b & d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}a+2b & c+2d\\ 3a+5b & 3c+5d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a + 2b = 1 \\ 3a + 5b = 0 \\ c + 2d = 0 \\ 3c + 5d = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 - 2b \\ 3(1-2b) + 5b = 0 \\ c = -2d \\ 3(-2d) + 5d = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 1 - 2b \\ 3 - b = 0 \\ c = -2d \\ -6d + 5d = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 3 \\ a = -5 \\ d = -1 \\ c = 2 \end{cases}$$

Donc $A^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

2ème méthode

$(A/I) = \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 - 3L_1 \end{matrix} \left| \begin{matrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{matrix} \right| \begin{matrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{matrix} \right|$

$\begin{matrix} L_1 \\ -L_2 \end{matrix} \left| \begin{matrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{matrix} \right| \begin{matrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{matrix} \right|$

$\begin{matrix} L_1 - 2LI_2 \\ LI_2 \end{matrix} \left| \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \right| \begin{matrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{matrix} \right|$

b- $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} 2a + 3b + c = 1 \\ 2b + 3c = 0 \\ a + 5c = 0 \\ 2d + 3e + f = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2e + 3f = 1 \\ d + 5f = 0 \\ 2g + 3h + i = 0 \\ 2h + 3i = 0 \\ g + 5i = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = -5c \\ b = -\frac{3}{2}c \\ 2a + 3b + c = 1 \\ e = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}f \\ d = -5f \\ 2g + 3h + i = 0 \\ h = -\frac{3}{2}i \\ g = 1 - 5i \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -10c - \frac{9}{2}c + c = 1 \Rightarrow c = \frac{10}{27} \\ a = \frac{10}{27} \\ b = \frac{1}{9} \\ c = -\frac{2}{27} \\ d = \frac{-5}{9} \\ e = \frac{1}{3} \\ f = \frac{1}{9} \\ g = \frac{7}{27} \\ h = -\frac{2}{9} \\ i = \frac{4}{27} \end{cases}$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{10}{27} & \frac{-5}{9} & \frac{7}{27} \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{9} \\ \frac{2}{27} & \frac{1}{9} & \frac{4}{27} \end{pmatrix}$$

Exercice 3 : $\varepsilon_1 = (1,1,1) = e_1 + e_2 + e_3$ $\quad \varepsilon_2 = (1,-1,0) = e_1 - e_2$
$\varepsilon_3 = (1,0,1) = e_1 + e_3$

La matrice de passage de base B à la base B' s'écrit donc

$$P \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{matrix}$$

(colonnes : ε_1, ε_2, ε_3)

$e_1 = (1,0,0)$; $e_2 = (0,1,0)$; $e_3 (0,0,1)$

- $\varepsilon_1 = (1,1,1)$
  $= (1,0,0) + (0,1,0) + (0,0,1)$
  $= 1 \times e_1 + 1 \times e_2 + 1 \times e_3$
- $\varepsilon_2 = (1,-1,0)$
  $= (1,0,0) + (0,-1,0) + 0$
  $= 1 \times e_1 + 1 \times e_2 + 0 \times e_3$
- $\varepsilon_3 = (1,0,1)$
  $= (1,0,0) + 0 + (0,0,1)$
  $= e_1 \times 1 + 0 \times e_2 + 1 \times e_3$

2) La matrice de f dans la base B'
s'écrit sous la forme $D = P^{-1} A P$

$L_1 + L_2$; $L_1 - L_3$; $L_3 - L_1$; $L_2 - L_1$; L_2

$$P^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 4:

$A = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 7 \end{vmatrix}$ $\qquad A = 2\times 7 - 1\times 5 = 14 - 5 = 9$

$B = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 6 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

1ère méthode (méthode directe)

si on développe par rapport à la première ligne :

$$B = 1\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$$

$$B = 1(1-4) - 2(6-8) + 1(12-4) = -3 + 4 + 8 = 9$$

si on développe par rapport à la 1ère colonne

$$B = 1\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 6\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$B = 1(1-4) - 6(2-2) + 4(4-1) = 9$$

2ème méthode (simplification)

Les règles de calcul

La valeur du déterminant ne change pas en ajoutant à une colonne (resp une ligne) une combinaison linéaire des autres colonnes (resp, ligne)

Exemple:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \underset{C_2 \to C_1 + C_2 + C_3}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 6 & 3 \\ 1 & 6 & 3 \end{vmatrix} \underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_3}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 3 \end{vmatrix}$$

$(1+2+3)$ $\quad (2+1+3)$ $\quad (1-2+1)$

on peut mettre en facteur dans un déterminant un facteur commun à une colonne (ou une ligne)

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 6 & 9 & 6 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 2 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 9 & 6 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 2 \times 3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

La permutation de deux colonnes adjacentes (ou lignes adjacentes) change de signe du déterminant.

. Le déterminant d'une matrice qui contient deux colonnes ou deux lignes identiques est nul.

$$B = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 6 & 9 & 6 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix} \qquad L_2 - 6L_1 \; ; \; L_3 - 4L_1 \qquad C_2 - 2C_1$$

on soustrait la troisième ligne de première ligne :

$$L_1 \leftarrow L_1 - L_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 6 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

on développe par rapport à la 1ère ligne:

$$\begin{vmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3(1-4) = 9$$

3ème méthode (Règle de Sarrus)

$$B = \begin{vmatrix} \overset{+}{1} & \overset{+}{2} & \overset{+}{1} & \overset{-}{1} & \overset{-}{2} \\ 6 & 1 & 2 & 6 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \times 1 \times 1 + 2 \times 2 \times 4 + 1 \times 6 \times 2 - 2 \times 6 \times 1 - 1 \times 2 \times 2 - 1 \times 1 \times 4$$

$$= 1 + 16 + 12 - 12 - 4 - 4 = 9$$

ATTENTION ! la règle sarrus ne s'applique que sur les déterminants d'ordre 3

$$C = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 9 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix}$$

Il s'agit d'une matrice triangulaire, donc :

$C = 1 \times 9 \times 6 = 54$

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 13 \\ 2 & -6 & -10 \\ 1 & 9 & 19 \end{vmatrix}$$

en utilisant la régle de Sarrus

$$= \begin{vmatrix} 3 & 5 & 13 & 3 & 5 \\ 2 & -6 & -10 & 2 & -6 \\ 1 & 9 & 19 & 1 & 9 \end{vmatrix}$$

$= -342 - 50 + 234 - 190 + 270 + 78 = 0$

En utilisant la simplification :

on effectue le changement suivant : $C_1 \longleftarrow C_1 + 2C_2$

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 13 \\ 2 & -6 & -10 \\ 1 & 9 & 19 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 13 & 5 & 13 \\ -10 & -6 & -10 \\ 19 & 9 & 19 \end{vmatrix}$$

on remarque que ce déterminant contient 2 colonnes identique, donc il est nul

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 13 \\ 2 & -6 & -10 \\ 1 & 9 & 19 \end{vmatrix} = 0$$

$$E = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

- la régle de Sarrus ne s'applique pas sur ce déterminant
- le calcul direct de ce déterminant nécessite beaucoup de calcul, En effet

$$E = 1 \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} - 1 \times \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} - 3 \times \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

Nous devons donc calculer 3 déterminant d'ordre 3

la méthode de simplification

$$E = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$L_3 \leftarrow L_3 + L_1$ $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$

$L_4 \leftarrow L_4 - 3L_1$: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & -5 & -1 & -3 \end{vmatrix}$

On développe par rapport à la 1ère colonne :

$E = 1 \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 5 & -1 & -3 \end{vmatrix}$

$L_3 \leftarrow L_3 + L_1$ $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ -5 & -1 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ -2 & 0 & -1 \end{vmatrix}$

$L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1$: $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ -2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -10 & 0 & -6 \\ -2 & 0 & -1 \end{vmatrix}$

Il suffit maintenant à développer par rapport à la deuxième colonne :

$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -10 & 0 & -6 \\ -2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} -10 & -6 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = -1(10-12) = 2$

Exercice 5 :

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ On a la formule $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \, {}^t(Co(A))$

$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -1$

$Co(A) = \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}$

$A^{-1} = \frac{1}{(-1)} \, {}^t\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

2) $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

$B^{-1} = \frac{1}{\det(B)} \, {}^t(Co(B))$

$\det(B) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 5 \end{vmatrix} \overset{C_3 \to C_3 - 5C_1}{=} \begin{vmatrix} 2 & 3 & -9 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

$= 1\ (9+18)$

$\det(B) = 27$

$$Co(A) = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$Co(A) = \begin{pmatrix} 10 & 3 & -2 \\ -15 & 9 & 3 \\ 7 & -6 & 4 \end{pmatrix}$$

donc : $B^{-1} = \frac{1}{27}\ {}^{t}\begin{pmatrix} 10 & 3 & -2 \\ -15 & 9 & 3 \\ 7 & -6 & 4 \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{27} \begin{pmatrix} 10 & -15 & 7 \\ 3 & 9 & -6 \\ -2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$;

$$= \begin{pmatrix} \frac{10}{27} & -\frac{5}{9} & \frac{7}{27} \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{9} \\ -\frac{2}{27} & \frac{1}{9} & \frac{4}{27} \end{pmatrix}$$

Exercice 6 :

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

1)

$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1-4 = -5$

$\det(B) = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3+2 = 5$

$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 5 & -5 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \det(AB) = \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 5 & -5 \end{vmatrix} = -25$

on remarque que $\det(A) \cdot \det(B) = \det(AB)$

posons $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} e & g \\ f & h \end{pmatrix}$

$\det(A) = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc$ $\quad$ $\det(B) = \begin{vmatrix} e & g \\ f & h \end{vmatrix} = eh - fg$

donc $\det(A) . \det(B) = (ad - bc)(eh - fg)$

$= adeh - adfg - bceh + bcfg$

D'un autre coté

$$AB = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & g \\ f & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae + cf & ag + eh \\ bc + df & bg + dh \end{pmatrix}$$

Donc $\det(AB) = (ae + cf)(bg + dh) - (be + df)(ag + ch)$

$= aebg + aedh + cfbg + cfdh - beag - becf - dfag - dfch$

$= adeh - adfg - bceh + bcfg$

D'où $\det(A) . \det(B) = \det(AB)$

2) $\det(A) . \det(B) = 0$

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \det(A+B) = 0$

on remarque que $\det(A) + \det(B) = \det(A+B)$

posons $A\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$; $B\begin{pmatrix} e & g \\ f & h \end{pmatrix}$

$\det(A) = ad - bc$; $\det(B) = eh - fg$

Donc $\det(A) + \det(B) = ad - bc + eh - fg$

D'un autre côté $A + B = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e & g \\ f & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+e & c+g \\ b+f & d+h \end{pmatrix}$

Donc

$\det(A+B) = (a+e)(d+h) - (b+f)(c+g)$

$= ad + ah + ed - bc - bg - cf - fg$

$\neq ad - bc + eh - fg$

Donc d'un autre façon générale : $\det(A+B) = \det(A) + \det(B)$

D'où la non linéarité du déterminant ($f(x+y) \neq f(x)+f(y)$)

Exercice 7 :

a) $a = \begin{vmatrix} x & -3 & 5 \\ 1 & -1 & 3 \\ 9 & -7 & 8x \end{vmatrix} = 0$

• $C_2 + C_1$: $\begin{vmatrix} x-3 & -3 & 5 \\ 0 & -1 & 3 \\ 2 & -7 & 8x \end{vmatrix} = 0$

• $C_3 + 3C_2$ $\begin{vmatrix} x-3 & -3 & -4 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & -7 & 8x-21 \end{vmatrix} = 0$

on développe par rapport à la 2ème ligne

$-\begin{vmatrix} x-3 & -4 \\ 2 & 8x-21 \end{vmatrix} = 0$

$(x-3)(8x-21)+8 = 0$

$8x^2 - 21x - 24x + 63 + 8 = 0$

$8x^2 - 45x + 71 = 0$

$D = b^2 - 4ac$

$= (45)^2 - 4 \times 8 \times 71$

$= -247$

Donc cette équation n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$

Dans $\mathbb{C}$: $x_1 = \dfrac{-45 - 2\sqrt{247}}{16}$ $\qquad x_2 = \dfrac{45 + 2\sqrt{247}}{16}$

b) $b \begin{vmatrix} -12 & 3 & 0 \\ -11 & x & -3 \\ -x & -5 & 2 \end{vmatrix} = 141$

$C_1 + 4C_2$: $\begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 \\ -11+4x & x & -3 \\ -x-20 & -5 & 2 \end{vmatrix} = 141$

• on factorise la 1ère ligne par 3

$3\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -11+4x & x & -3 \\ -x-20 & -5 & 2 \end{vmatrix} = 141$

$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -11+4x & x & -3 \\ -x-20 & -5 & 2 \end{vmatrix} = 47$

on développe par rapport à la 1ère ligne :

$$\begin{vmatrix} -11+4x & -3 \\ -x-20 & 2 \end{vmatrix} = 47$$

$$-22+8x-3x-60=47$$

$$-(-82+5x)=47$$

Donc $(-82+5x)=47$

ce qui donne $5x=35$

$$\boxed{x=7}$$

Exercice 8 :

a) $\begin{vmatrix} x & a & b & c \\ a & x & b & c \\ a & b & x & c \\ a & b & c & x \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} x+a+b+c & a & b & c \\ a+x+b+c & x & b & c \\ a+b+x+c & b & x & c \\ a+b+c+x & b & c & x \end{vmatrix}$$

on factorise par la 1ère colonne

$$=(x+a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & a & b & c \\ 1 & x & b & c \\ 1 & b & x & c \\ 1 & b & c & x \end{vmatrix}$$

- $C_2 - aC_1 = (x+a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 0 & b & c \\ 1 & x-a & b & c \\ 1 & b-a & x & c \\ 1 & b-a & c & x \end{vmatrix}$

- $C_3 - bC_1$ et $C_4 - cC_1$

$$=(x+a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x-a & 0 & 0 \\ 1 & b-a & x-b & 0 \\ 1 & b-a & c-b & x-c \end{vmatrix}$$

D'où

$$\begin{vmatrix} x & a & b & c \\ a & x & b & c \\ a & b & x & c \\ a & b & c & x \end{vmatrix} = (x+a+b+c)(x-a)(x-b)(x-c)$$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+c & a+c & a+b \\ bc & ac & ab \end{vmatrix}$ $C_2 \leftarrow C_2 - C_1$ et $C_3 \leftarrow C_3 - C_1$

$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b+c & a-b & a-c \\ bc & c(a-b) & b(a-c) \end{vmatrix}$ on factorise la 2ème colonne par $a-b$ et 3ème colonne par $a-c$

$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b+c & a-b & a-c \\ bc & c(a-b) & b(a-c) \end{vmatrix}$

$= (a-b)(a-c) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b+c & 1 & 1 \\ bc & -c & b \end{vmatrix}$

on développe par rapport à la 1ère ligne :

$(a-b)(a-c) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b+c & 1 & 1 \\ bc & c & b \end{vmatrix} = (a-b)(a-c)(b-c)$

Exercice 9 : calculer le rang du matrice

$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & m \end{vmatrix}$ $B = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 6 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & 0 & 10 \end{vmatrix}$

$C = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & -2 & -3 \\ 1 & 4 & 3 & -1 & -4 \\ 2 & 3 & -4 & -7 & -3 \\ 3 & 8 & 1 & -7 & 8 \end{vmatrix}$

pour A :

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & m \end{pmatrix} \begin{matrix} L_2 - 2L_1 \\ L_3 - 3L_1 \\ = \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & m-9 \end{pmatrix}$

$-1L_2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & m-9 \end{pmatrix} \underset{=}{L_3 + 2L_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & m-5 \end{pmatrix}$

- si $m = 5$ alors le rang de la matrice $= 2$
- si $m \neq 5$ alors le rang de la matrice $= 3$

pour B

$B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 6 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & 0 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 6 \\ 3 & 0 & 10 \end{pmatrix}$

$$L_3 - 3L_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 6 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} L_2 \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

$$L_3 - 6L_2 \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & +2 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix} = -\frac{1}{8} L_3 \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc le rang de la matrice est = 3

pour C : $L_2 - L_1$, $L_3 - 2L_1$, $L_4 - 3L_1$ =

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & -6 & -3 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$L_3 + 3L_1$, $L_4 + L_2$ =

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

rang (C) = 2